ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKLODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXV, 28 SECTIO H 1991

Zakład Zastosowań Matematyki
Wydziału Ekonomicznego UMCS

Mieczysław SOBCZYK

Statystyczne metody prognozowania

Statistical Methods of Prediction

UWAGI TERMINOLOGICZNE

Prognozowaniem nazywamy oparte o naukowe podstawy przewidywanie przebiegu i stanu możliwych (prawdopodobnych) przyszłych zdarzeń. Konkretny wynik procesu przewidywania określamy mianem prognozy. W wielu ośrodkach badawczych na całym świecie konstruuje się obecnie szereg różnego rodzaju prognoz. W literaturze polskiej najczęściej można spotkać się z następującą klasyfikacją prognoz:[1]

Kryterium podziału	Rodzaje prognoz
horyzont czasowy	prognozy krótko-, średnio- i długoterminowe, perspektywiczne i ponadperspektywiczne, operacyjne i strategiczne (rozpoznawcze),
charakter lub struktura	prognozy proste i złożone, prognozy zjawisk typu ilościowego i jakościowego,
stopień szczegółowości	prognozy ogólne i szczegółowe, prognozy całościowe (globalne lub kompleksowe) i częściowe (fragmentaryczne lub odcinkowe), makro- i mikroekonomiczne,
zasięg terenowy	prognozy światowe, międzynarodowe, krajowe i regionalne,
metoda opracowania	prognozy indukcyjne i dedukcyjne, minimalne, średnie i maksymalne, czyste (pierwotne) i weryfikowane, modelowe,
cel lub funkcja	prognozy ostrzegawcze, badawcze i normatywne, pasywne i aktywne.

---
[1] K. Secomski: *Prognostyka*. Wiedza Powszechna, Warszawa 1971, s. 51.

Wydaje się, że najważniejszym kryterium klasyfikacji prognoz jest horyzont czasowy, tj. zbiór tych wszystkich przyszłych okresów, dla których budowane są prognozy. Prognozami krótkookresowymi nazywamy takie, które zostały sporządzone na okres nie przekraczający roku. Prognozy średniookresowe dotyczą okresu od 2 do 5 lat, a długookresowe — obejmują ponad 5 lat. Dodać przy tym należy, że podział ten ma orientacyjny charakter. Klasyfikacja prognoz z punktu widzenia horyzontu czasowego jest bowiem uzależniona od dziedziny prognozowania (obiektów prognozy), np. A. Filasiewicz dzieli prognozy według kryterium czasowego w następujący sposób:[2]

Rodzaje prognoz	Długoterminowe	Średnioterminowe	Krótkoterminowe
gospodarcze	10–13 lat	2–10 lat	poniżej 2 lat
rozwoju techniki	7–15 lat	3–7 lat	1–3 lat
meteorologiczne	10–100 dni	3–10 dni	1–2 dni
morskie	10 dni	1–10 dni	1–24 godzin
lawin	2–5 dni	15–48 godzin	2–15 godzin

W miarę wydłużania horyzontu czasowego prognozy, jej trafność (pewność) ulega zmniejszeniu. W otaczającej nas rzeczywistości obserwujemy bowiem ciągłe zmiany; jedne zjawiska są dość stabilne, inne zaś — zmieniają się w szybkim tempie. W tej sytuacji pewniejsza jest prognoza zbudowana na najbliższe okresy, gdyż błąd prognozy, tj. różnica między prognozą a faktyczną wartością, jaką przyjmie zmienna prognozowana w okresie prognozowanym, będzie z pewnością znacznie mniejszy niż w przypadku odleglejszego okresu prognozowanego (horyzontu prognozy). Zwiększenie pewności prognoz można — oprócz skracania horyzontu czasowego — osiągnąć poprzez:[3]

1) zastosowanie kilku metod prognozowania i porównanie ich wyników,

2) porównanie otrzymanej prognozy z innymi podanymi wcześniej w literaturze przedmiotu, a odnoszącymi się do tego samego problemu,

3) potwierdzenie otrzymanych wyników poprzez logiczne lub matematyczne wyprowadzenie wniosków ze znanych już prognoz,

4) przeprowadzenie weryfikacji merytorycznej.

Przy budowie prognoz wykorzystywane są różne metody. Można je podzielić na dwie grupy: statystyczno-matematyczne i niematematyczne. Metody statystyczno-matematyczne bazują na modelach ekonometrycznych (jednorównaniowych bądź wielorównaniowych). Model ekonometryczny — to równanie (lub układ równań), które w sposób przybliżony przedstawia zasadnicze powiązania ilościowe występujące między rozpatrywanymi zjawiskami. Proces wnioskowania w przyszłość na podstawie modelu ekonometrycznego określany jest mianem predykcji ekonometrycznej. Przykładem modeli ekonometrycznych jednorównaniowych mogą być funkcje regresji, czy też klasyczne modele trendu. Z niematematycznych metod prognozowania można wymienić metody ankietowe, intuicyjne, metodę ekspertyz, ko-

[2] A. Filasiewicz: *Prognoza, program, plan*. Wiedza Powszechna, Warszawa 1971, s. 57.
[3] A. Zeliaś: *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa 1984, s. 21.

lejnych przybliżeń, delficką, metody analogowe, modelowe, metodę refleksji.[4] W dalszej części tego artykułu zajmiemy się jedynie metodami prognozowania opartymi o funkcje regresji i trendu (tendencji rozwojowej). Funkcje te służą do konstrukcji prognoz ilościowych, tj. takich, w których chodzi o liczbową ocenę wartości zmiennej prognozowanej w okresie prognozowanym. Prognozy ilościowe można podzielić na punktowe i przedziałowe. Prognoza ilościowa punktowa dana jest za pomocą jednej liczby, stanowiącej możliwie dobre przybliżenie przyszłej realizacji zmiennej prognozowanej. Predykcja przedziałowa polega na wyznaczeniu przedziału liczbowego, o którym z określonym prawdopodobieństwem można twierdzić, że będzie zawierać przyszłą realizację zmiennej prognozowanej, czyli:

$$P\{y_{TP} \in I_p\} = 1 - \alpha \qquad (1)$$

gdzie y_{TP} oznacza wartość prognozy dla zmiennej prognozowanej Y_T okresie prognozowanym T, I_p jest przedziałem liczbowym, natomiast $1 - \alpha$ jest z góry obranym, bliskim jedności prawdopodobieństwem. Za $1 - \alpha$ najczęściej przyjmuje się prawdopodobieństwa 0,90 i 0,95. W literaturze przedmiotu prawdopodobieństwo $1 - \alpha$ określane jest mianem wiarygodności prognozy.

Z uwagi na zakładane z góry duże prawdopodobieństwo $1 - \alpha$ spełnienia się prognozy, predykcja przedziałowa jest bardziej przydatna w praktyce niż punktowa. Dla zbudowania prognoz przedziałowych konieczna jest jednak znajomość typu rozkładu składnika losowego modelu wykorzystywanego dla celów predykcji (model ten określamy mianem predyktora).

Na podkreślenie zasługuje fakt, że nie każdy model ekonometryczny może stanowić podstawę do budowy prognoz. Dla celów prognozowania mogą być wykorzystywane tylko takie modele, które spełniają tzw. podstawowe założenia ekonometrycznego wnioskowania w przyszłość, którymi są:[5]

1) znajomość postaci analitycznej, ocen parametrów strukturalnych i parametrów struktury stochastycznej modelu opisującego kształtowanie się zmiennej prognozowanej,

2) stabilność czasowa struktury opisywanych przez dany model zjawisk. Założenie to dotyczy nie tylko przedziału czasowego, z którego pochodziły dane dotyczące przeszłości (tzw. przedziału czasowego próby), ale również okresu prognozowanego. Dopuszczalne są tylko powolne i regularne zmiany struktury,

3) stabilność rozkładu składnika losowego w przedziale czasowym próby i w okresie prognozowanym,

4) znajomość wartości zmiennych objaśniających modelu w okresie prognozowanym. Przewidywane wartości zmiennych objaśniających dla okresu prognozowanego można ustalić następująco:

a) jeżeli zmienne objaśniające są wskaźnikami będącymi przedmiotem planowania gospodarczego (np. wielkość dochodu narodowego, płaca realna, wielkość inwe-

[4] Szersze informacje dotyczące tych metod można znaleźć m.in. w pracach: A. Zeliaś: *Teoria...*, *op. cit.*; *Praktyczne metody predykcji*, SGPiS, Warszawa 1975 oraz w pracy zbiorowej pod red. M. Cieślak: *Nieklasyczne metody prognozowania*, PWN, Warszawa 1983.

[5] Z. Pawłowski: *Elementy ekonometrii*, PWN, Warszawa 1981, s. 283–284.

stycji), to wartości zmiennych objaśniających występujących w modelu w okresie prognozowanym ustalane są na poziomie założonym w planie,

b) poprzez wykorzystanie istniejących już prognoz tych zmiennych,

c) w drodze wyznaczenia trendów tych zmiennych, a następnie ich ekstrapolację,

d) poprzez budowę dla każdej zmiennej objaśniającej nowego modelu i wyznaczenie prognoz w oparciu o te modele,

5) dopuszczalność ekstrapolacji modelu poza zaobserwowany w próbie obszar zmienności zmiennych objaśniających. W przypadku, gdy zmienne objaśniające w okresie prognozowanym będą charakteryzować się istotnymi zmianami dynamiki znacznie odbiegającymi od przedziału czasowego próby, to ekstrapolacja modelu poza zaobserwowany w próbie obszar zmienności zmiennych objaśniających będzie nieuzasadniona. Dodać przy tym trzeba, że założenie dopuszczalności ekstrapolacji modelu — w przeciwieństwie do pozostałych — jest trudne do empirycznej weryfikacji.

W procesie wnioskowania w przyszłość mogą być wykorzystywane różne zasady, tj. reguły postępowania na podstawie których budowane są prognozy. W przypadku predykcji ilościowej najczęściej bierze się pod uwagę dwie zasady, a mianowicie: zasadę predykcji nieobciążonej oraz zasadę predykcji według największego prawdopodobieństwa. Zasada predykcji nieobciążonej polega na ustaleniu prognozy na poziomie wartości oczekiwanej zmiennej prognozowanej w okresie prognozowanym T, tzn.:

$$Y_{TP} = E(Y_T) \tag{2}$$

gdzie Y_T jest zmienną prognozowaną w okresie prognozowanym, Y_{TP} jest wartością prognozy dla okresu T, natomiast symbol E jest operatorem wartości oczekiwanej (nadziei matematycznej).

Jeżeli proces wnioskowania w przyszłość jest wielokrotnie powtarzany (np. systematycznie sporządzane prognozy popytu konsumpcyjnego), to prognozując zgodnie z zasadą predykcji nieobciążonej otrzymujemy — średnio — ani nie zawyżone, ani nie zaniżone oceny przyszłych realizacji zmiennej prognozowanej. Wynika to z tego, że w dostatecznie długim ciągu prognoz popełnione błędy dodatnie równoważą się z ujemnymi.

W przypadku, gdy wnioskowanie w przyszłość ma charakter jednorazowy lub jest powtarzane w długich odstępach czasu należy postępować w taki sposób, aby zapewnić maksimum szans realizacji tej jednej prognozy. W takich sytuacjach znajduje zastosowanie zasada predykcji według największego prawdopodobieństwa. Polega ona na ustaleniu prognozy na poziomie najbardziej prawdopodobnej wartości zmiennej prognozowanej, czyli na poziomie dominanty:

$$Y_{TP} = m_T(y) \tag{3}$$

gdzie $m_T(y)$ oznacza dominantę rozkładu zmiennej prognozowanej Y_T w okresie T. Tak więc, jeśli zmienna prognozowana ma charakter skokowy, za prognozę tej

zmiennej przyjmuje się wówczas tę jej wartość, której odpowiada największe prawdopodobieństwo realizacji w okresie T. Natomiast w przypadku zmiennej ciągłej, za prognozę przyjmujemy tę wartość zmiennej prognozowanej, której odpowiada maksimum funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu tej zmiennej.

Podstawowe założenia teorii predykcji ekonometrycznej uzupełniane są zazwyczaj dwoma dodatkowymi postulatami. Pierwszy z nich głosi, że efektem predykcji powinna być nie tylko odpowiednia prognoza, lecz także ocena rzędu jej dokładności. Drugi postulat wskazuje, że gdy możliwa jest konstrukcja prognozy kilkoma sposobami, to należy wybrać ten, którego miernik rzędu dokładności predykcji jest najlepszy.

Ocena dokładności skonstruowanych prognoz może być przeprowadzona w dwojaki sposób: 1) przez podanie oczekiwanej wartości odchyleń rzeczywistych realizacji zmiennej prognozowanej od prognozy (błąd średni predykcji), 2) przez obliczenie średniego błędu prognozy. Pierwszy sposób jest miernikiem dokładności *ex ante*, drugi zaś — miernikiem dokładności *ex post*. Przy predykcji przedziałowej miernikami rzędu dokładności wnioskowania w przyszłość są: 1) z góry przyjęte prawdopodobieństwo $1 - \alpha$, 2) długość przedziału predykcji I_p. Przy ustalonej długości przedziału sytuacja jest tym korzystniejsza, im wyższe (bliższe jedności) jest prawdopodobieństwo $1-\alpha$. Natomiast przy ustalonym prawdopodobieństwie $1-\alpha$ wnioskowanie jest tym korzystniejsze, im krótszy jest przedział predykcji I_p.

Błąd średni predykcji (miernik dokładności predykcji *ex ante*) definiujemy następująco:

$$V_T = \sqrt{E(Y_T - y_{TP})^2} \tag{4}$$

Różnica między zmienną prognozowaną w okresie prognozowanym a wartością prognozy nazywana jest błędem predykcji. Przy stosowaniu zasady predykcji nieobciążonej spełniona jest równość (2). Stąd też błąd średni predykcji jest miarą rzędu odchyleń zmiennej prognozowanej od postawionej prognozy w długim ciągu okresów prognozowanych charakteryzujących się tymi samymi wartościami zmiennych objaśniających. W praktyce wygodniej jest posługiwać się względnym średnim błędem predykcji obliczanym według wzoru:

$$\tilde{V}_T = \frac{V_T}{y_{TP}} \cdot 100\% \tag{5}$$

Względny średni błąd predykcji informuje o tym, jaką procentowo część prognozy stanowi średni błąd predykcji. Prognoza jest tym lepsza, im mniejsze są wartości $\tilde{V}_T$. Korzystając z tego formułuje się często kryterium dopuszczalności prognozy w postaci nierówności:

$$\tilde{V}_T \leq \gamma \quad \text{dla} \quad \gamma > 0 \tag{6}$$

gdzie γ jest daną z góry liczbą (zwykle wyrażoną w procentach), zależną od konkretnej sytuacji oraz praktycznych potrzeb w zakresie wymaganej dokładności formułowanych prognoz. Oznacza to, że wielkości γ mogą kształtować się różnie

dla różnych zmiennych prognozowanych i odmiennych warunków dokonywania predykcji. Prognozy spełniające relację (6) nazywamy prognozami dopuszczalnymi. W przypadku prognoz przedziałowych kryterium dopuszczalności formułuje się jako:

$$P\{|Y_T - y_{TP}| < \varepsilon\} \geq 1 - \alpha \tag{7}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ oraz $0 < 1 - \alpha < 1$ są z góry obranymi liczbami. W zastosowaniach praktycznych liczbę ε ustala się na stosunkowo niskim poziomie, natomiast prawdopodobieństwo $1-\alpha$ na możliwie wysokim poziomie. Konkretny dobór tych wielkości zależy od określonych warunków, decydujących o praktycznej przydatności prognoz.

Średni błąd prognozy (miernik dokładności *ex post*) jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji błędu prognozy, tzn.:

$$S_P = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{T=n+1}^{n+m}(Y_T - y_{TP})^2} \quad (T = n+1,\ldots,n+m) \tag{8}$$

gdzie y_T oznacza rzeczywiste realizacje zmiennej Y w okresie prognozowanym T, y_{TP} — wartości prognozy dla zmiennej Y w okresie T, natomiast m jest liczbą naturalną określającą odległość okresu prognozowanego od okresu bieżącego.

Średni błąd prognozy informuje, o ile — średnio rzecz biorąc — rzeczywiste realizacje zmiennej prognozowanej różnią się od wyznaczonych prognoz. Oczywistym jest, że miernik (8) można obliczyć dopiero po zrealizowaniu się m prognoz wskutek upływu czasu (prognozy takie określamy mianem prognoz wygasłych).

PROGNOZOWANIE NA PODSTAWIE FUNKCJI REGRESJI

Metoda prognozowania wykorzystująca funkcje regresji wymaga uprzedniego rozwiązania szeregu problemów, a mianowicie: wyboru analitycznej postaci funkcji, doboru najlepszego zbioru zmiennych objaśniających, wyboru metody estymacji parametrów, wyznaczenia wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym, wreszcie — wyboru odpowiedniej metody predykcji. Podstawą predykcji może być tylko taka funkcja regresji, która charakteryzuje się własnościami predyktywnymi, tzn. dobrym dopasowaniem do danych empirycznych. Na dobre dopasowanie funkcji do danych empirycznych wskazują niskie średnie błędy szacunku parametrów strukturalnych, mała wariancja składników resztowych oraz niewielka wartość współczynnika zbieżności φ^2. Mając daną funkcję regresji spełniającą powyższe warunki oraz przyjmując zasadę „status quo" (tzn. zakładając niezmienność funkcji w okresie prognozowanym) możemy przystąpić do ustalenia wartości zmiennej prognozowanej w okresie prognozowanym T. W tym celu do funkcji regresji podstawiamy wartości zmiennych objaśniających w okresie objętym prognozą. Czynność ta nosi nazwę ekstrapolacji funkcji regresji poza próbę, a otrzymane w jej wyniku prognozy określane są mianem prognoz złożonych (z uwagi

na występującą zazwyczaj większą liczbę zmiennych objaśniających). Po ustaleniu prognozy, można przystąpić do określenia błędu predykcji. Procedurę wyznaczania prognoz w oparciu o funkcję regresji zilustrujemy konkretnym przykładem.

W celu zbadania zależności pomiędzy wysokością obrotów (Y) w sklepach pewnej branży a liczbą zatrudnionych (X_1) i powierzchnią użytkową sklepów wyrażoną w dziesiątkach $m^2 (X_2)$ zebrano niezbędne informacje w 7 kolejnych jednostkach czasu (jednostkami tymi mogą być np. lata). Informacje te przedstawiają się następująco:

Jednostki czasu	1	2	3	4	5	6	7
Obroty w mld zł	2	4	7	9	12	15	20
Zatrudnienie w osobach	3	6	9	15	8	12	16
Powierzchnia użytkowa	5	9	13	9	17	14	16

Jednorównaniowy model ekonometryczny o postaci liniowej funkcji regresji można w tym przypadku zapisać w następującej postaci ogólnej:

$$Y_t = \alpha_o + \alpha_1 X_{t1} + \alpha_2 X_{t2} + \xi_t \qquad (9)$$

gdzie Y_t jest zmienną objaśnianą, X_{t1} i X_{t2} — zmiennymi objaśniającymi, α_o, α_1, α_2 — parametrami strukturalnymi, ξ_t — składnikiem losowym, natomiast $t = 1, 2, \ldots, 7$ oznacza numer okresu (obserwacji na zmiennej).

Przy szacowaniu funkcji (9) niezwykle wygodny jest zapis wektorowo-macierzowy. Równanie (9) w notacji wektorowo-macierzowej przyjmuje postać:

$$Y = X\alpha + \xi \qquad (10)$$

W postaci rozwiniętej równanie macierzowe (10) zapisujemy jako:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_o \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Natomiast relację, w której wartości parametrów strukturalnych α_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$) zastąpiono ich ocenami a_i, a składnik losowy ξ_t jego realizacjami u_t (resztami) można zapisać w postaci:

$$Y = Xa + u \qquad (12)$$

gdzie: Y — wektor kolumnowy realizacji wartości zmiennej objaśnianej o wymiarach $nx1$, X — macierz realizacji wartości zmiennych objaśniających o wymiarach $nx(k+1)$, u — wektor kolumnowy reszt o wymiarach $nx1$.

Podstawową metodą estymacji parametrów strukturalnych jednorównaniowego modelu ekonometrycznego jest klasyczna metoda najmniejszych kwadratów (KMNK).

Przy założeniu, że spełnione są warunki stosowalności KMNK, oceny parametrów strukturalnych otrzymujemy ze wzoru:

$$a = (X'X)^{-1}X'y \tag{13}$$

gdzie symbol $'$ jest znakiem transpozycji.

Przystępując do wyznaczenia wektora ocen parametrów strukturalnych a według wzoru (13) należy w pierwszej kolejności wyznaczyć iloczyn macierzy transponowanej (przestawionej) X' i macierzy X. Macierz transponowaną X' otrzymujemy z macierzy X poprzez zastąpienie wierszy kolumnami, kolumn zaś — wierszami. Wykorzystując dane liczbowe z naszego przykładu mamy:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 15 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 13 & 9 & 17 & 14 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \\ 1 & 9 & 13 \\ 1 & 15 & 9 \\ 1 & 8 & 17 \\ 1 & 12 & 14 \\ 1 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 69 & 83 \\ 69 & 815 & 881 \\ 83 & 881 & 1097 \end{bmatrix}$$

Z kolei należy wyznaczyć macierz odwrotną $(X'X)^{-1}$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia macierzy odwrotnej do danej macierzy kwadratowej jest, aby macierz ta była nieosobliwą, tzn. aby jej wyznacznik był różny od zera. W naszym przypadku mamy $\det X'X = 78880 \neq 0$. Macierz $X'X$ jest zatem macierzą nieosobliwą. Istnieje więc macierz odwrotna do niej. W celu wyznaczenia macierzy odwrotnej $(X'X)^{-1}$ znajdujemy najpierw dopełnienia algebraiczne wszystkich elementów macierzy $X'X$. W naszym przykładzie macierz dopełnień algebraicznych $(X'X)^D$ ma postać:

$$(X'X)^D = \begin{bmatrix} 117894 & -2570 & -6856 \\ -2570 & 790 & -440 \\ -6856 & -440 & 944 \end{bmatrix}$$

Dzieląc elementy macierzy dopełnień algebraicznych $(X'X)^D$ przez wyznacznik $\det(X'X)$ otrzymujemy macierz odwrotną $(X'X)^{-1}$:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{78880} \begin{bmatrix} 117894 & -2570 & -6856 \\ -2570 & 790 & -440 \\ -6856 & -440 & 944 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4946 & -0,0326 & -0,0868 \\ -0,0326 & 0,0100 & -0,0056 \\ -0,0869 & -0,0056 & 0,0120 \end{bmatrix}$$

W kolejnym etapie należy znaleźć iloczyn transponowanej macierzy X' i wektora y:

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 15 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 13 & 9 & 17 & 14 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 \\ 824 \\ 952 \end{bmatrix}$$

Podstawiając wszystkie wyniki pośrednie do wzoru (13) otrzymujemy:

$$a = \begin{bmatrix} 1,4946 & -0,0326 & -0,0869 \\ -0,0326 & 0,0100 & -0,0056 \\ -0,0869 & -0,0056 & 0,0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69 \\ 824 \\ 952 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,4628 \\ 0,6594 \\ 0,8135 \end{bmatrix}$$

Liniowa funkcja regresji wysokości obrotów sklepów (Y) względem liczby zatrudnionych (X_1) i powierzchni użytkowej (X_2), ma więc następującą postać:

$$\hat{y}_t = -6,4628 + 0,6594x_{1t} + 0,8135x_{2t}$$

Współczynnik regresji cząstkowej $a_1 = 0,6594$ oznacza, że przy stałej powierzchni użytkowej sklepów ($X_2 = constans$), wzrostowi liczby zatrudnionych o jedną osobę odpowiada przeciętny wzrost obrotów sklepów równy 0,6594 mld zł w skali rocznej. Współczynnik regresji cząstkowej $a_2 = 0,8135$ oznacza, że przy stałej liczbie zatrudnionych ($X_1 = constans$) wzrostowi powierzchni użytkowej sklepów o każde 10 m^2 odpowiada przeciętny wzrost wartości rocznych obrotów o 0,8135 mln zł.

Dokonując statystycznej weryfikacji oszacowanego modelu, obliczymy błędy standardowe ocen parametrów strukturalnych α_i. Oceny średnich błędów szacunku parametrów strukturalnych otrzymujemy w drodze pierwiastkowania elementów leżących na głównej przekątnej macierzy wariancji i kowariancji. Macierz wariancji i kowariancji powstaje przez przemnożenie wariancji składnika resztowego $S^2(u)$ przez macierz $(X'X)^{-1}$. Oznaczając macierz wariancji i kowariancji symbolem $D^2(a)$ otrzymujemy:

$$D^2(a) = S^2(u)(X'X)^{-1} \qquad (14)$$

Macierz $D^2(a)$ ma wymiary kxk (k — liczba szacowanych parametrów). Elementy znajdujące się na głównej przekątnej macierzy $D^2(a)$ są równe wariancjom estymatorów poszczególnych parametrów, tzn. element leżący na przecięciu się i-tego wiersza i j-tej kolumny jest równy wariancji estymatora α_i ($i = 0, 1, \ldots, k$). Elementy znajdujące się poza główną przekątną są równe kowariancjom estymatorów, tzn. są parametrami określającymi stopień skorelowania dwóch estymatorów.

Wariancję składnika resztowego $S^2(u)$ obliczamy następująco:

$$S^2(u) = \frac{y'y - a'X'y}{n-k} \qquad (15)$$

Wykorzystując dane liczbowe z naszego przekładu mamy:

$$y'y = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 & 12 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} = 919$$

$$a'X'y = \begin{bmatrix} -6,4628 & 0,6594 & 0,8135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69 \\ 824 \\ 952 \end{bmatrix} = 871,8644$$

Stąd:

$$S^2(u) = \frac{919 - 871,8644}{7-3} = 11,7839$$

Macierz wariancji i kowariancji jest zatem równa:

$$D^2(a) = 11,7839 \begin{bmatrix} 1,4946 & -0,0326 & -0,0869 \\ -0,0326 & 0,0100 & -0,0056 \\ -0,0869 & -0,0056 & 0,0120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,6122 & -0,3842 & -1,0240 \\ -0,3842 & 0,1178 & -0,0660 \\ -1,0240 & -0,0660 & 0,1414 \end{bmatrix}$$

Średnie błędy szacunku parametrów strukturalnych oszacowanej funkcji regresji obliczymy następująco:

$$D(a_o) = \sqrt{17,6122} = 4,1967$$

$$D(a_1) = \sqrt{0,1178} = 0,3432$$

$$D(a_2) = \sqrt{0,1414} = 0,3760$$

Oszacowaną w naszym przykładzie funkcję regresjo można więc ostatecznie zapisać w postaci:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{y}_t & = & \underset{(4,1967)}{-6,4628} & + & \underset{(0,3432)}{0,6594x_{t1}} & + & \underset{(0,3760)}{0,8135x_{t2}} \end{array}$$

gdzie pod ocenami parametrów strukturalnych zapisane są w nawiasach ich średnie błędy szacunku.

Zbadamy teraz istotność statystyczną otrzymanych ocen. Hipotezę zerową zapiszemy w postaci: $H_o : \alpha_i = 0$, a hipotezę alternatywną jako: $H_1 : \alpha_i \neq 0$. Statystyki t-Studenta obliczymy ze wzoru:

$$t = \frac{a_i}{D(a_i)} \tag{16}$$

Podstawiając odpowiednie dane z naszego przykładu do wzoru (16) mamy:

$$t(a_0) = \frac{-6,4628}{4,1967} = -1,54$$

$$t(a_1) = \frac{0,6594}{0,3432} = 1,9213$$

$$t(a_2) = \frac{0,8135}{0,3760} = 2,1636$$

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,1$ odczytujemy z tablic rozkładu Studenta — dla 4 stopni swobody — wartość krytyczną $t_\alpha = 1,132$. We wszystkich przypadkach zachodzi $|t| > t_\alpha$. Oznacza to, że zmienne objaśniające x_1 i x_2 wywierają istotny wpływ na kształtowanie się zmiennej objaśnianej Y.

Z kolei sprawdzimy, czy oszacowana funkcja regresji jest dobrze dopasowana do danych empirycznych. W tym celu obliczymy współczynnik zbieżności φ^2 według wzoru:

$$\varphi^2 = \frac{y'y - a'X'y}{y'y - \frac{1}{n}(1'y)^2} \tag{17}$$

gdzie $1'$ jest transponowanym wektorem jedynek.

Podstawiając odpowiednie dane liczbowe z naszego przykładu do wzoru (17) otrzymujemy:

$$\varphi^2 = \frac{919 - 817,8644}{919 - \frac{1}{7}\cdot 4761} = 0,1973$$

Oszacowaną funkcję regresji należy więc ocenić jako dość dobrze dopasowaną do danych empirycznych, gdyż jedynie 19,73% całkowitej zaobserwowanej zmienności (wariancji) zmiennej Y jest dziełem przypadku. Pozostała część (80,27%) całkowitej zaobserwowanej zmienności zmiennej Y jest wyjaśniona zmiennością przyjętych zmiennych objaśniających x_1 i x_2. Ostatecznie możemy więc stwierdzić, że oszacowana funkcja regresji dobrze opisuje kształtowanie się wielkości obrotów i może być wykorzystana dla celów prognozowania.

Tak więc do prognozowania poziomu obrotów w sklepach tej branży w okresach np. $n+1$ oraz $n+2$ zostanie wykorzystany predyktor o postaci:

$$y_T = -6,4628 + 0,6594x_{1T} + 0,8135x_{2T}$$

Zakładając, że wartości zmiennych objaśniających (zatrudnienie i powierzchnia użytkowa) w okresie $n+1$ wyniosą odpowiednio: 18 i 22, natomiast w okresie $n+2$ — 20 i 24, prognozy obrotów wyznaczymy następująco: dla okresu $n+1$: $Y_T = -6,4628 + 0,6594 \cdot 18 + 0,8135 \cdot 22 = 23,3034$ mld zł, dla okresu $n+2$: $Y_T = -6,4628 + 0,6594 \cdot 20 + 0,8135 \cdot 24 = 26,2492$ mld zł. Średnie błędy predykcji obliczamy ze wzoru:

$$V_T = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} X_{iT}^2 D^2(a_i) + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{s>i} X_{iT}X_{sT}cov(a_i, a_s) + \sigma_T^2} \tag{18}$$

gdzie: X_{iT}, X_{sT} — założone wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym, $D^2(a_i)$ — wariancja estymatora α_i, $cov(a_i, a_s)$ — kowariancja estymatorów parametrów α_i, α_s, σ_T^2 — wariancja składnika losowego w okresie prognozowanym (praktycznie przyjmuje się, że $\sigma_T^2 = S^2(u)$).

Wstawiając odpowiednie dane z naszego przykładu do wzoru (18) mamy:

— dla okresu $n+1$:

$$V_T^2 = 1^2 \cdot 17,6122 + 18^2 \cdot 0,1178 + 22^2 \cdot 0,1414 + 2\,[1.\,18 \cdot (-0,3842) +$$
$$+1 \cdot 22 \cdot (-1,0240) + 18 \cdot 22 \cdot (-0,660)] + 11,7839 =$$
$$= 124,217 - 111,1592 + 11,7839 = 24,8417$$

Stąd $V_T = \sqrt{24,8417} = 4,98$

— dla okresu $n+2$:

$$V_T^2 = 1 \cdot 17,6122 + 20^2 \cdot 0,1178 + 24^2 \cdot 0,1414 + 2\,[1.\,20 \cdot (-0,3842) +$$
$$+1 \cdot 24 \cdot (-1,0240) + 20 \cdot 24 \cdot (-0,660)] + 11,7839 =$$
$$= 146,1786 - 127,88 + 11,7839 = 30,0825$$

Stąd $V_T = \sqrt{30,0825} = 5,48$.

Dla modelu jednorównaniowego wariancję predykcji można również obliczyć stosując wzór macierzowy o postaci:

$$V_T^2 = X_*' D^2(a_i) X_* + \sigma_T^2 \tag{19}$$

gdzie X_* jest wektorem założonych wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym.

Podstawiając odpowiednie dane liczbowe z naszego przykładu do wzoru (19) otrzymujemy:

— dla okresu $n+1$:

$$V_T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17,6122 & -0,33842 & -1,0240 \\ -0,3842 & 0,1178 & -0,0660 \\ -1,0240 & -0,0660 & 0,1414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \\ 22 \end{bmatrix} + 11,7839 =$$

$$= \begin{bmatrix} -11,8314 & 0,2842 & 0,8988 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \\ 22 \end{bmatrix} + 11,7839 = 24,8417$$

— dla okresu $n+2$:

$$V_T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17,6122 & -0,3842 & -1,0240 \\ -0,3842 & 0,1178 & -0,0660 \\ -1,0240 & -0,0660 & 0,1414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} + 11,7839 =$$

$$= \begin{bmatrix} -14,6478 & 0,3878 & 1,0496 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} + 11,7839 = 30,0825$$

Otrzymane wyniki są identyczne z tymi, które uzyskano przy zastosowaniu wzoru (18). Obydwa sposoby można więc stosować zamiennie. Stosowanie wzoru macierzowego (19) jest jednak mniej czasochłonne.

Względne błędy średnie predykcji (wzór 5) są natomiast równe:

— dla okresu $n+1$: $\tilde{V}_T = \frac{4,98}{23,3034} \cdot 100 = 21,37\%$

— dla okresu $n+2$: $\tilde{V}_T = \frac{5,48}{26,2492} \cdot 100 = 20,88\%$

Przy prognozowaniu techniką przedziałową konieczne jest dodatkowe założenie o normalności rozkładu składników losowych ξ_t modelu (9). Przy tym dodatkowym założeniu wzór na przedział ufności dla przyszłej wartości y_T zmiennej objaśnianej Y ma postać:[6]

$$P\{y_{TP} - t_\alpha V_T < Y_T < y_{TP} + t_\alpha V_T\} = 1 - \alpha \qquad (20)$$

gdzie y_{TP} oznacza prognozę punktową, V_T jest średnim błędem predykcji, $1-\alpha$ określonym z góry współczynnikiem ufności, t_α — wartością zmiennej t-Studenta odczytaną z tablicy tego rozkładu dla poziomu istotności α i dla $n-k-1$ stopni swobody w taki sposób, aby spełniona była relacja: $P\{|t| \geq t_\alpha\} = \alpha$.

Dla $1-\alpha = 0,95$ oraz $7-2-1 = 4$ stopni swobody wartość $t_\alpha = 2,776$. Prognozę przedziałową wysokości obrotów zbudujemy zatem w następujący sposób:

— dla okresu $n+1$:

$$23,3034 - 2,776 \cdot 4,98 < Y_{n+1} < 23,3034 + 2,776 \cdot 4,98$$

$$9,4789 \text{ mld zł} < Y_{n+1} < 37,1279 \text{ mld zł}$$

— dla okresu $n+2$:

$$26,2492 - 2,776 \cdot 5,48 < Y_{n+2} < 26,2492 + 2,776 \cdot 5,48$$

$$11,0367 \text{ mld zł} < Y_{n+2} < 41,4617 \text{ mld zł}$$

Długość przedziału prognozy (czyli różnica między górną i dolną granicą przedziału) zależy przede wszystkim od wielkości średniego błędu predykcji. Im błąd ten jest większy, tym przedział dłuższy, a prognoza mniej dokładna. Ponadto, długość przedziału prognozy nie jest wielkością stałą, gdyż średni błąd predykcji występujący we wzorze (20) jest funkcją założonych na okres prognozowany wartości zmiennych objaśniających.

[6] Praca zbiorowa pod red. W. Sadowskiego: *Elementy ekonometrii i programowania matematycznego*, PWN, Warszawa 1985, s. 58.

EKSTRAPOLACJA TENDENCJI ROZWOJOWEJ

Wykorzystanie modeli tendencji rozwojowej dla celów prognozowania eliminuje problem ustalania wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym, gdyż jedyną zmienną objaśniającą jest tu czas. Prognozowanie w oparciu o predyktor trendu może być stosowane jedynie w tym przypadku, gdy nie ma wyraźnych okoliczności przemawiających przeciw zasadzie dynamicznego „status quo". Zasada ta głosi, że postać analityczna funkcji trendu i wartości jej parametrów w okresie prognozowanym T nie mogą ulec istotnej zmianie w porównaniu z okresem, którego dotyczyły informacje liczbowe służące za podstawę szacowania modelu trendu. W przeciwnym przypadku metoda ekstrapolacji funkcji trendu jest zawodna i prowadzi — na ogół — do dużych błędów wnioskowania w przyszłość.

Technikę budowy prognozy w oparciu o funkcję tendencji rozwojowej zilustrujemy przykładem dotyczącym zużycia energii elektrycznej w pewnej gałęzi przemysłu. Dysponujemy następującymi danymi wyjściowymi:

Jednostki czasu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zużycie energii (w mln kWh)	116	117	122	115	118	126	135	138	140	146

Opierając się na graficznej ocenie przebiegu szeregu czasowego wielkości zużycia energii elektrycznej, za analityczną postać badanej zmiennej przyjęto liniową funkcję trendu o postaci:

$$Y_t = \alpha_o + \alpha_1 t + \xi_t \quad (t = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

Parametry α_o i α_1 funkcji (21) oszacowano metodą najmniejszych kwadratów. Stosowanie MNK do szacowania parametrów funkcji (21) sprowadza się do rozwiązania układu równań normalnych o postaci macierzowej:

$$T'y = T'Ta \tag{22}$$

gdzie:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Przekształcając relację (22) otrzymujemy:

$$a = (T'T)^{-1}T'y \tag{23}$$

Określając macierz odwrotną wzorem:

$$(T'T)^{-1} = \begin{bmatrix} A & -C \\ -C & B \end{bmatrix} \tag{24}$$

gdzie a_o i a_1 otrzymujemy z równania:

$$a = \begin{bmatrix} A & -C \\ -C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} ty_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \sum_{t=1}^{n} y_t - C \sum_{t=1}^{n} ty_t \\ -C \sum_{t=1}^{n} y_t + B \sum_{t=1}^{n} ty_t \end{bmatrix} \tag{25}$$

Stąd

$$a_o = A\sum_{t=1}^{n} y_t - C\sum_{t=1}^{n} ty_t$$

$$a_1 = -C\sum_{t=1}^{n} y_t + B\sum_{t=1}^{n} ty_t \tag{26}$$

Wykorzystując z kolei równości:

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2} \tag{27}$$

oraz

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{28}$$

otrzymujemy następujące wzory na wartości A, B, C (uzależnione tylko od n)[7]:

$$A = \frac{2(2n+1)}{2n(2n+1) - 3n(n+1)} \tag{29}$$

$$B = \frac{12}{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)^2} \tag{30}$$

$$C = \frac{6}{2n(2n+1) - 3n(n+1)} \tag{31}$$

Wariancję składnika resztowego funkcji (21) obliczamy według wzoru (15). Pierwiastkując wartość wariancji otrzymujemy odchylenie standardowe składnika resztowego $S(u)$. Średnie błędy szacunku znajdujemy natomiast ze wzorów:

$$D(a_o) = S(u)\sqrt{A} \tag{32}$$

[7] T. Grabiński, S. Wydymus: *Uproszczone procedury estymacji modeli tendencji rozwojowej i wykorzystania ich do predykcji*, AE, Kraków 1982, s. 16.

oraz

$$D(a_1) = S(u)\sqrt{B} \tag{33}$$

W przypadku wykorzystywania oszacowanej funkcji (36) do prognozowania, należy obliczyć średni błąd predykcji *ex ante*. W przypadku liniowej funkcji trendu wzór na średni błąd predykcji ma postać:

$$V_T = \sqrt{D^2(a_o) + D^2(a_1) + 2cov(a_o, a_1)T + \sigma_T^2} \tag{34}$$

gdzie $\sigma_T^2 = S^2(u)$. Wiedząc, że $cov(a_o, a_1) = S^2(u)\sqrt{C}$ oraz dokonując dość skomplikowanych przekształceń wzoru (34) otrzymujemy następujący wzór na średni błąd predykcji w przypadku liniowej funkcji trendu:

$$V_T = S(u)\sqrt{1 + n^{-1} + \frac{3(3T - n - 1)^2}{n^3 - n}} \tag{35}$$

Wykorzystując dane liczbowe z naszego przykładu — przy $n = 10$ — mamy:

$$A = \frac{2(2 \cdot 10 + 1)}{2 \cdot 10(2 \cdot 10 + 1) - 3 \cdot 10(10 + 1)} = 0,4667$$

$$B = \frac{12}{2 \cdot 10(10 + 1)(2 \cdot 10 + 1) - 3 \cdot 10(10 + 1)^2} = 0,0121\,.$$

$$C = \frac{6}{2 \cdot 10(2 \cdot 10 + 1) - 3 \cdot 10(10 + 1)} = 0,0667$$

$\sqrt{A} = 0,6832$, $\sqrt{B} = 0,11$, $\sqrt{C} = 0,2583$, $\sum_{t=1}^{n} y_t = 1273$, $\sum_{t=1}^{n} ty_t = 7291$.

Wykorzystując układ (26) otrzymujemy:

$$a_o = 0,4667 \cdot 1273 - 0,0667 \cdot 7291 = 107,7994$$

$$a_1 = -0,0667 \cdot 1273 + 0,0121 \cdot 7291 = 3,312$$

Odchylenie standardowe składnika resztowego obliczone na podstawie danych liczbowych z naszego przykładu wynosi $S(u) = 4,8731$. Średnie błędy szacunku policzone przy wykorzystaniu wzorów (32) i (33) są zatem równe:

$$D(a_o) = 4,8731 \cdot 0,6832 = 3,3293$$

$$D(a_1) = 4,8732 \cdot 0,11 = 0,536.$$

Oszacowana liniowa funkcja trendu zużycia energii elektrycznej przyjmuje więc postać:

$$\hat{y}_t = 107,7994 + 3,312t + u_t$$
$$(3,3293) \quad (0,536) \quad (4,8731) \qquad (36)$$

gdzie w nawiasach pod ocenami parametrów strukturalnych podane są średnie błędy ich szacunku.

W kolejnym etapie dokonamy statystycznej weryfikacji istotności otrzymanych ocen. Stawiamy hipotezę zerową: $H_o : \alpha_i = 0$, wobec hipotezy alternatywnej (konkurencyjnej): $H_1 : \alpha_i \neq 0$. Test istotności pozwalający na weryfikację postawionej hipotezy zerowej oparty jest na rozkładzie statystyki t-Studenta (wzór 16). W naszym przykładzie mamy:

$$t(a_o) = \frac{107,7994}{3,3293} = 32,379$$

oraz

$$t(a_1) = \frac{3,312}{0,536} = 6,179$$

Wartość krytyczna statystyki t odczytana z tablic rozkładu Studenta dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ i dla $10 - 2 = 8$ stopni swobody wynosi: $t_\alpha = 2,306$. Dla obydwu parametrów spełniona jest więc nierówność: $|t| > t_\alpha$. Stąd też hipotezę zerową należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej. O dobrym opisie przez oszacowaną funkcję trendu (36) zużycia energii elektrycznej świadczy również mała wartość współczynnika zbieżności ($\varphi^2 = 0,16$).

Ekstrapolacja wyznaczonej funkcji trendu na okres przyszły wymaga wyraźnego sformułowania założenia, że czynniki kształtujące poziom zużycia energii elektrycznej nie ulegną istotnej zmianie w okresie objętym prognozą. Przyjmując to założenie, dla zbudowania prognozy zużycia energii korzystać będziemy z predyktora o postaci:

$$Y_T = 107,7994 + 3,312T \qquad (37)$$

Z uwagi na to, że okres $n+1$ ma numer 11 (10+1), prognoza zużycia energii w tym okresie będzie równa:

$$Y_{TP} = 107,7994 + 3,312 \cdot 11 = 144,2314 \text{mln kWh}$$

Wykorzystując z kolei wzór (35) obliczymy średni błąd predykcji:

$$V_T = 4,8731\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{3(2 \cdot 11 - 10 - 1)^2}{10^3 - 10}} = 7,1472$$

Względny średni błąd predykcji (wzór 5) jest natomiast równy:

$$\tilde{V}_T = \frac{7,1472}{144,8314} \cdot 100 = 4,96\%$$

Dokładność zbudowanej prognozy należy więc uznać za zadowalającą.

Dla $\alpha = 0,05$ i 8 stopni swobody wartość krytyczna statystyki t Studenta wynosi $t_\alpha = 2,306$. Prognozę przedziałową zużycia energii elektrycznej wyznaczymy zatem następująco:

$$144,2314 - 2,306 \cdot 7,1472 < Y_T < 144,2314 + 2,306 \cdot 7,1472$$

$$127,75 \text{ mln kWh} < Y_T < 160,71 \text{mln kWh}$$

Z prawdopodobieństwem 0,95 można zatem twierdzić, że zużycie energii elektrycznej przez rozpatrywaną gałąź przemysłu w okresie $n + 1$ będzie wielkością z przedziału (127,75–160,71 mln kWh).

SUMMARY

The article makes use of two most frequent methods in the process of prediction. These are the functions of regression and trend (progressive tendency). Both procedures of prediction are included within the group of statistical — mathematic methods. Besides a purely theoretical discussion, the article presents definite numerical examples, which make it easier to understand the substance of the methods discussed here and their possibilities of practical application.